Analyse Complexe
TD 9
Représentation conforme

Exercice 1 Dans tout l'exercice, D désigne le disque unité ouvert et $H = \{z, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan supérieur.

1. Donner des biholomorphismes entre D, H, $\{z, \arg z \in]0, \alpha[\}$ avec $\alpha \leq 2\pi$.
2. Expliciter un biholomorphisme entre la bande $S = \{z, 0 < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$ et H. Application : fabriquer une fonction harmonique sur D étendant la fonction u sur S^1 vérifiant $u(z) = 0$ si $\mathrm{Im}(z) < 0$ et $u(z) = 1$ si $\mathrm{Im}(z) > 0$.
3. On appelle *lunule* un ouvert du plan complexe délimité par deux arcs de cercle se rencontrant en deux points (éventuellement confondus). Construire un biholomorphisme explicite entre une lunule et H (ou D).
   On pourra appliquer une transformation de Möbius pour envoyer un des points d'intersection à l'infini.
4. Construire un biholomorphisme entre un disque privé d'un segment orthogonal au cercle bordant le disque et H.
5. Quelle est l'image de $\{z \in H, 0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$ par cos ? Quelle est l'image de $\{z \in H, 0 < \mathrm{Re}(z) < \pi/2\}$ par sin ?
6. Quelles sont les différentes déterminations possibles de argch sur H et leurs images ?

Exercice 2 On appelle automorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ un biholomorphisme de U sur lui-même. Déterminer les automorphismes du disque unité ouvert. Montrer que les automorphismes du demi-plan supérieur sont de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc = 1$.

Exercice 3 Soit f une fonction holomorphe sur $\{z, \mathrm{Re}(z) > 0\}$, à valeurs dans le disque unité. On suppose que f s'annule en 1 avec multiplicité m. Montrer que

$$|f(z)| \leq \left|\frac{1-z}{1+z}\right|^m.$$

Exercice 4 Existe-t-il une surjection holomorphe de D sur $\mathbb{C}$?

Exercice 5 Le but de l'exercice est de déterminer les couronnes qui sont biholomorphes entre elles. On se donne deux couronnes $C_1 = \{r_1 < |z| < R_1\}$ et $C_2 = \{r_2 < |z| < R_2\}$. On suppose que $R_1, R_2 < +\infty$.

1. Si $r_1 R_2 = r_2 R_1$, exhiber un biholomorphisme entre les deux couronnes.
   Réciproquement, on se donne φ un biholomorphisme entre C_1 et C_2.
2. Montrer que $|\varphi|$ se prolonge au bord de C_1. Comme $1/\varphi$ est aussi un biholomorphisme entre deux couronnes (lesquelles ?), on peut donc supposer, ce que l'on fait, que $\lim_{|z|\to r_1} |\varphi(z)| = r_2$, et $\lim_{|z|\to R_1} |\varphi(z)| = R_2$, quitte à remplacer φ par $1/\varphi$.
3. Montrer que $r_1 = 0$ si et seulement si $r_2 = 0$.
   On pose
   $$A(s) = \sup_{|z|=e^s} \log|\varphi(z)| \quad \text{et} \quad B(l) = \sup_{|\varphi(z)|=e^l} \log|z|.$$
4. Montrer que $A(B(l)) \geq l$.
5. Montrer que A est strictement croissante.

6. En déduire que $A \circ B = l$, et que A, B sont affines.

   Utiliser le résultat de l'exercice 3 du TD 3 (théorème des trois cercles d'Hadamard).

7. A l'aide des questions précédentes, montrer que $\varphi(z) = \lambda z^\epsilon$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\epsilon = \pm 1$, et que $r_1 R_2 = r_2 R_1$.

Exercice 6 Soit $\alpha \in]0, \pi]$, $U_\alpha = \{z \in \mathbb{C}^*, -\alpha < \arg(z) < \alpha\}$. Soit f holomorphe bornée sur U_α telle que $\lim_{z \to 0, z \in]0,1]} f(z) = \ell$.

1. Posons $f_n(z) = f(z/2^n)$ pour $n \geq 1$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur les compacts de U_α vers la fonction constante égale à ℓ.
2. Montrer que pour tout $0 < \beta < \alpha$, $\lim_{z \to 0, z \in U_\beta} f(z) = \ell$.

Exercice 7 Dans tout l'exercice, les polygones qui interviennent sont considérés comme fermés et pleins.

1. On se donne deux rectangles du plan R et S. On suppose qu'il existe une fonction holomorphe f définie sur un ouvert contenant R, telle que $f(R) = S$.
   (a) Montrer que f induit une bijection entre les sommets de R et ceux de S.
   (b) Soit C un côté du rectangle S. Montrer qu'il existe un côté c du rectangle R tel que $f(c) \cap C$ soit infini. Montrer que cela entraîne $f(c) = C$ (on pourra se ramener au cas où c et C sont inclus dans $\mathbb{R}$). Conclure que f envoie chaque côté de R sur un côté de S.
   (c) Montrer que l'on peut étendre f en une fonction entière à croissance linéaire. Conclure que f est une transformation affine et que R et S sont semblables.
   (d) Soit R, S deux rectangles non semblables. Montrer qu'il existe une fonction g holomorphe sur $\mathring{R}$, telle que $f(\mathring{R}) = \mathring{S}$ et telle que l'image par f d'un rectangle inclus dans $\mathring{R}$ n'est jamais un rectangle.
2. On suppose que R et S sont maintenant deux polygones convexes à n côtés ; f est encore une application holomorphe définie sur un ouvert contenant R, telle que $f(R) = S$.
   (a) En s'inspirant de la question précédente, montrer que f réalise une bijection du bord de R sur le bord de S et que les angles intérieurs de R et S sont les mêmes. En déduire que f induit une application conforme de l'intérieur de R sur celui de S.
   (b) Si $n = 3$, i.e. si R et S sont deux triangles, montrer que la conclusion de la question 1 reste valable : f est une transformation affine. On utilisera librement le fait que toute application conforme entre l'intérieur d'un triangle et le disque unité s'étend continûment au bord.

Exercice 8 On note Σ l'ensemble des fonctions F holomorphes injectives sur $U = \mathbb{C} \backslash \bar{D}$, ayant un développement de Laurent de la forme

$$F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

1. A titre d'exemple, dessiner l'image de la fonction (dite de Joukowski) $F : z \mapsto z + 1/z$.
2. Soit $F \in \Sigma$. Montrer que $\mathbb{C} \backslash F(U)$ est un compact connexe, noté $K(F)$, d'aire égale à $\pi(1 - \sum_n n|b_n|^2)$.
3. *Première application.* Montrer que Σ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts est compact.

   Si vous avez fait l'exercice 7 du TD 3, vous pouvez en déduire que l'espace S des fonctions holomorphes injectives de D dans $\mathbb{C}$, avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ est aussi compact.

4. (*) *Deuxième application.* Soit $U = \mathbb{C} \backslash (K_1 \cup \ldots \cup K_n)$, les K_i étant des compacts connexes disjoints de $\mathbb{C}$, non réduits à des points. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphes injectives ayant un développement de Laurent à l'infini comme ci-dessus. On va montrer qu'il existe $F \in \mathcal{F}$ réalisant un biholomorphisme entre U et le complémentaire de n segments horizontaux disjoints.

   Commencer par construire F dans le cas $n = 1$, en traitant d'abord le cas $K_1 = \bar{D}$. Que peut-on dire de $\mathrm{Re}(b_1(F))$? Quand a-t-on $\mathrm{Re}(b_1(F)) > 0$?

   Puis traiter le cas général en cherchant $F \in \mathcal{F}$, avec

   $$\mathrm{Re}(b_1(F)) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Re}(b_1(f)).$$

   On commencera par s'assurer que F existe !